深圳中学 2027 届高三第一阶段考试数学试题（2026 年 10 月）

参考答案与解析

答案速查

1. C

2. C

3. B

4. B

5. D

6. C

7. B

8. B

9. B,D

10. A,B,D

11. A,C

12. $\frac{2}{9}$

13. 2

14. $4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

逐题解析

1. 参考答案： C

参考解析：

由题意，

$$A=(-\infty,a],\qquad B=[-1,1].$$

当 $a<-1$ 时，两集合没有公共元素；当 $a=-1$ 时，

$$A\cap B=\{-1\};$$

当 $a>-1$ 时，交集不止一个元素。所以

$$\boxed{a=-1},$$

选 C。

2. 参考答案： C

参考解析：

由

$$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{\mathrm{e}^{-2x}+1}=\frac{\mathrm{e}^{(2-a)x}}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

以及 $f(x)$ 是偶函数，得

$$\mathrm{e}^{(2-a)x}=\mathrm{e}^{ax}$$

对一切实数 x 成立。因此

$$2-a=a,$$

解得

$$\boxed{a=1}.$$

选 C。

3. 参考答案： B

参考解析：

由

$$\tan x=0$$

可得

$$x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

这些数都可以写成整数倍的 $\frac{\pi}{2}$，所以

$$\tan x = 0 \implies x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

反过来，当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，虽然满足前一个条件，但 $\tan x$ 无定义，不能推出 $\tan x = 0$。因此，前者是后者的**必要不充分条件**，选 B。

4. 参考答案： B

参考解析：

由换底公式,

$$a = \frac{\ln 3}{\ln 5}, \qquad b = \frac{\ln 3}{\ln 4}.$$

因为

$$0 < \ln 3 < \ln 4 < \ln 5,$$

所以

$$0 < a < b < 1.$$

另一方面,

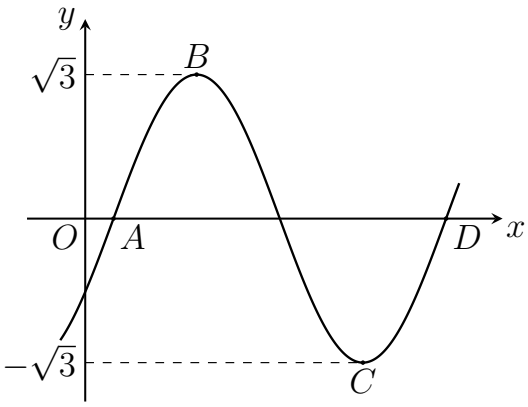
$$c = 2^{0.3} > 1.$$

因此

$$\boxed{c > b > a},$$

选 B。

5. 参考答案： D



参考解析：

设函数的周期为 T，记

$$h=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}>0.$$

由图象可知，A,D 是相邻的同向零点，B,C 分别是其间的最高点和最低点。因此，以 A 的横坐标为 u，有

$$A(u,0),\quad B(u+h,\sqrt{3}),\quad C(u+3h,-\sqrt{3}),\quad D(u+4h,0).$$

于是，线段 AD 与 BC 的中点均为

$$H(u+2h,0).$$

由于四点共圆，圆心同时位于弦 AD、BC 的垂直平分线上，所以圆心就是 H。从而

$$HA=HB.$$

由

$$HA=2h,\qquad HB=\sqrt{h^2+3},$$

得

$$4h^2=h^2+3.$$

因为 $h>0$，所以 $h=1$。因此

$$\boxed{\omega=\frac{\pi}{2}},$$

选 D。

6. 参考答案： C

参考解析：

求导得

$$f'(x) = \frac{a}{x} - \mathrm{e}^x.$$

若 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，则必须有

$$f'(x) \le 0,$$

即

$$a \le x\mathrm{e}^x$$

对所有 $x \in (1,2)$ 成立。函数 $g(x) = x\mathrm{e}^x$ 满足

$$g'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x > 0,$$

所以它在 $(1,2)$ 上递增。随着 x 从右侧趋近于 1，$x\mathrm{e}^x$ 可以任意接近 e，因此必须有

$$a \le \mathrm{e}.$$

当 $a = \mathrm{e}$ 时，对任意 $x \in (1,2)$，都有

$$x\mathrm{e}^x > \mathrm{e},$$

从而 $f'(x) < 0$，符合题意。所以

$$\boxed{a_{\max} = \mathrm{e}},$$

选 C。

7. 参考答案： B

参考解析：

先注意到

$$-x^2 - 2x = 1 - (x+1)^2 \le 1.$$

当 $a < 0$ 时，右支 $1 - 2x$ 在 $x > a$ 上的函数值可以任意接近

$$1 - 2a > 1,$$

但取不到这个值；而左支的函数值始终不超过 1。因此，整个函数不存在最大值。当 $a \ge 0$ 时，$x = -1$ 属于左支的定义范围，且

$$f(-1)=1.$$

左支的其他函数值不超过 1；右支中 $x>a\geq 0$，所以

$$1-2x<1.$$

此时函数的最大值为 1。因此，$f(x)$ 存在最大值的条件是

$$a\geq 0,$$

故

$$\boxed{a_{\min}=0}.$$

选 B。

8. 参考答案： B

参考解析：

因为 $x,y>0$ 且 $x+y=2a$，所以 $a>0$。令

$$t=xy.$$

由基本不等式，

$$0<t\leq a^2,$$

且 $t=a^2$ 当且仅当 $x=y=a$。原式可化为

$$xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=t+\frac{x+y}{xy}=t+\frac{2a}{t}.$$

设

$$g(t)=t+\frac{2a}{t},$$

则

$$g'(t)=1-\frac{2a}{t^2}.$$

所以，$g(t)$ 在 $(0,\sqrt{2a})$ 上递减，在 $(\sqrt{2a},+\infty)$ 上递增。要使原式在 $x=y$，即 $t=a^2$ 时取得最小值，必须且只需

$$a^2\leq\sqrt{2a}.$$

结合 $a>0$，得

$$a^4 \le 2a \iff a^3 \le 2.$$

因此

$$\boxed{a \in (0, \sqrt[3]{2}]},$$

选 B。

9. 参考答案： B,D

参考解析：

由

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

两边平方，得

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{3},$$

所以

$$\boxed{\sin 2\alpha = -\frac{2}{3}}.$$

故 A 错误，B 正确。因为 $\alpha \in (0, \pi)$，所以 $\sin\alpha > 0$。结合

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{3},$$

可知 $\cos\alpha < 0$，于是

$$\cos\alpha - \sin\alpha < 0.$$

又

$$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = \frac{5}{3},$$

所以

$$\cos\alpha - \sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

因此

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

故 C 错误，D 正确，选 $\boxed{\text{BD}}$。

10. 参考答案： A,B,D

参考解析：

联立两曲线方程，得

$$ax^3+bx^2-1=0.$$

由于该方程有三个不同的实根 x_1,x_2,x_3，所以 $a\neq 0$，且

$$ax^3+bx^2-1=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

展开右侧并比较系数，得

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0,$$

$$x_1x_2x_3=\frac{1}{a}.$$

因为

$$x_1<x_2<0<x_3,$$

所以 $x_1x_2x_3>0$，从而

$$a>0.$$

故 A 正确。由

$$x_1(x_2+x_3)=-x_2x_3>0$$

及 $x_1<0$，得

$$x_2+x_3<0.$$

故 C 错误。于是

$$x_1+x_2+x_3<0.$$

结合

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\qquad a>0,$$

得

$$b > 0.$$

故 B 正确。最后，

$$y_2 + y_3 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} > 0,$$

因为分子、分母均为负数。故 D 正确，选 $\boxed{\text{ABD}}$。

11. 参考答案： A,C

参考解析：

A 选项

任取 $x \in D$。由 $f(x)$ 是偶函数，知 $-x \in D$，且

$$f(-x) = f(x).$$

若 $0 \in D$，则

$$f(0) = f(x + (-x)) \le \max\{f(x), f(-x)\} = f(x).$$

所以 $f(0)$ 是最小值，A 正确。

B 选项

构造定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

它是偶函数。若 a, b 都是整数，则 $a + b$ 也是整数，因此

$$f(a + b) = 0 = \max\{f(a), f(b)\}.$$

若 a, b 中至少有一个不是整数，则

$$\max\{f(a), f(b)\} = 1 \ge f(a + b).$$

所以这个函数是 S-函数。但

$$f(1) = 0 < 1 = f\left(\frac{1}{2}\right),$$

说明 $f(1)$ 不一定是最大值。故 B 错误。

C 选项

构造定义在 $\mathbb{Z}$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{是}31\text{ 的倍数},\\ 1, & x\text{不是}31\text{ 的倍数}.\end{cases}$$

它是偶函数。若 a,b 均为 31 的倍数，则 $a+b$ 仍为 31 的倍数；否则

$$\max\{f(a),f(b)\}=1,$$

题设不等式也成立。因此，它是 S-函数。在 $0\le x\le 2026$ 的整数范围内，最小值点为

$$0,31,62,\dots,2015.$$

因为

$$31\times 65=2015\le 2026<31\times 66,$$

所以这些点恰好有

$$65+1=66$$

个。故 C 正确。

D 选项

假设存在满足要求的函数。由 A 中的结论，$f(0)$ 为最小值；又因为 $f(0)=f(1)$，所以 $f(1)$ 也是最小值。根据定义，

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\le f\left(\frac{1}{5}\right),$$

以及

$$f\left(\frac{4}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)\le f\left(\frac{2}{5}\right).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{5}\right)&=f\left(1-\frac{4}{5}\right)\\&\le\max\left\{f(1),f\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}\\&=\max\left\{f(1),f\left(\frac{4}{5}\right)\right\}\\&=f\left(\frac{4}{5}\right).\end{aligned}$$

因此

$$f\left(\frac{1}{5}\right) \le f\left(\frac{4}{5}\right) \le f\left(\frac{2}{5}\right) \le f\left(\frac{1}{5}\right),$$

只能有

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right),$$

与题设要求矛盾。故 D 错误，选 $\boxed{\text{AC}}$。

12. 参考答案： $\frac{2}{9}$

参考解析：

在

$$f(x^3) = \log_8 x$$

中取 $x = \sqrt[3]{4}$，得

$$f(4) = \log_8 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}\log_8 4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}.$$

所以

$$\boxed{f(4) = \frac{2}{9}}.$$

13. 参考答案： 2

参考解析：

因为

$$-2 \le f(x) \le 2,$$

所以

$$f(x_1)f(x_2) = -4$$

只能在两个函数值分别为 2 和 -2 时成立。即 x_1, x_2 分别对应一个最高点和一个最低点。相邻最高点与最低点之间的横向距离为半个周期，因此

$$|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}.$$

由题意，

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$\boxed{\omega = 2}.$$

14. 参考答案： $4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

参考解析：

延长 AD, BC，交于点 E。由题意，

$$\angle EAB = \frac{\pi}{3}, \qquad \angle ABE = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$\angle AEB = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.$$

记

$$\theta = \frac{5\pi}{12}.$$

在 $\triangle ABE$ 中，由正弦定理，

$$BE = \frac{AB \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta}.$$

因为 C 在射线 BE 上，所以点 C 到直线 AD 的距离为

$$|BE - BC| \sin \theta.$$

又因为 D 在直线 AD 上，且 $CD = 1$，所以

$$|BE - BC| \sin \theta \le 1.$$

于是

$$BC \ge BE - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sin \theta}.$$

利用

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

得

$$BC \ge \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$

下面说明等号可以取到。在线段 BE 上取点 C，使

$$EC=\frac{1}{\sin\theta},$$

再从 C 向 AE 作垂线，垂足为 D，则 $CD=1$。此时

$$ED=\cot\theta=2-\sqrt{3},$$

而

$$AE=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\theta}=2(\sqrt{3}-1).$$

因为

$$0<ED<AE,$$

所以 D 确实在线段 AE 上，能够形成符合条件的四边形。因此

$$\boxed{BC_{\min}=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}.$$

15.（1） 参考答案：单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbb{Z}$。

参考解析：

先化简：

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos^2x-\sin^2x+2\sin x\cos x\\&=\cos 2x+\sin 2x\\&=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

正弦函数在

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right],\qquad k\in\mathbb{Z}$$

上单调递减。因此令

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,$$

解得

$$\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{8}+k\pi.$$

所以单调递减区间为

$$\boxed{\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right],\quad k\in\mathbb{Z}}.$$

15.（2） 参考答案： $a_{\min}=\frac{3\pi}{8}$。

参考解析：

先化简：

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x\\ &=\cos 2x+\sin 2x\\ &=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

有

$$f(x+a)=\sqrt{2}\sin\left(2x+2a+\frac{\pi}{4}\right).$$

若它是奇函数，则在 $x=0$ 时函数值必须为 0，所以

$$\sin\left(2a+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

即

$$2a+\frac{\pi}{4}=k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

此时

$$f(x+a)=(-1)^k\sqrt{2}\sin 2x,$$

确实为奇函数。因此所求条件为

$$a=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

结合 $a>0$，最小正值在 $k=1$ 时取得，即

$$\boxed{a_{\min}=\frac{3\pi}{8}}.$$

16.（1） 参考答案： 当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{4}{a^2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{4}{a^2},+\infty\right)$ 上单调递减。

参考解析：

函数的定义域为 $(0,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{2\sqrt{x}}=\frac{2-a\sqrt{x}}{2x}.$$

当 $a\le 0$ 时，对任意 $x>0$，都有

$$2-a\sqrt{x}>0,$$

所以 $f(x)$ 在

$$\boxed{(0,+\infty)}$$

上单调递增。当 $a>0$ 时，

$$f'(x)>0 \iff 0<x<\frac{4}{a^2},$$

$$f'(x)<0 \iff x>\frac{4}{a^2}.$$

所以 $f(x)$ 在

$$\boxed{\left(0,\frac{4}{a^2}\right)}$$

上单调递增，在

$$\boxed{\left(\frac{4}{a^2},+\infty\right)}$$

上单调递减。

16.（2） 参考答案： 当 $a>0$ 时，令 $u=\frac{2}{\mathrm{e}a^2}>0$。由 $\ln u\le u-1$ 及 $\ln 2<1$，得

$$f(x)\le \ln\frac{4}{a^2}-2=\ln u+\ln 2-1\le u+\ln 2-2<u-1=\frac{2}{\mathrm{e}a^2}-1.$$

参考解析：

由第（1）问，当 $a>0$ 时，

$$f(x)\le f\left(\frac{4}{a^2}\right)=\ln\frac{4}{a^2}-2.$$

先证明常用不等式

$$\ln t\le t-1,\qquad t>0.$$

设

$$h(t)=t-1-\ln t,$$

则

$$h'(t)=\frac{t-1}{t}.$$

因此 $h(t)$ 在 $t=1$ 处取得最小值 0，且只有 $t=1$ 时取等号。特别地，

$$\ln 2 < 1.$$

令

$$u = \frac{2}{\mathrm{e}a^2} > 0.$$

则

$$\begin{aligned} f(x) &\le \ln \frac{4}{a^2} - 2 \\ &= \ln(2\mathrm{e}u) - 2 \\ &= \ln u + \ln 2 - 1 \\ &\le u + \ln 2 - 2 \\ &< u - 1. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{f(x) < \frac{2}{\mathrm{e}a^2} - 1}.$$

最后一步始终是严格不等式，所以即使前面的某些步骤取等，也不影响最终的严格不等号。

17.（1） 参考答案： 由已知条件与正弦定理、余弦定理得 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$，又 $\cos A = \frac{3}{5} > 0$，$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B = \frac{\sqrt{2}}{10} > 0$，所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形。

参考解析：

由正弦定理，

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A, \qquad \sin C = \frac{c}{a}\sin A.$$

代入已知条件

$$(b-c)(\sin B + \sin C) = (a - \sqrt{2}c)\sin A,$$

并约去 $\sin A > 0$，得

$$\frac{(b-c)(b+c)}{a} = a - \sqrt{2}c,$$

即

$$b^2 - c^2 = a^2 - \sqrt{2}ac.$$

整理得

$$a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac.$$

由余弦定理,

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以

$$B=\frac{\pi}{4}.$$

又因为

$$\cos A=\frac{3}{5}>0,$$

所以 A 为锐角，并且

$$\sin A=\frac{4}{5}.$$

于是

$$\begin{aligned}\cos C&=-\cos(A+B)\\&=\sin A\sin B-\cos A\cos B\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{10}>0.\end{aligned}$$

所以 C 也是锐角。因此

$$\boxed{\triangle ABC\text{是锐角三角形}}.$$

17.（2） 参考答案： $S_{\triangle ABC}=\frac{18}{35}$。

参考解析：

由第（1）问,

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin(A+B)\\&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\&=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

根据正弦定理,

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=\frac{5}{7}.$$

设

$$b=5t,\qquad c=7t,\qquad t>0.$$

则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5t\cdot 7t\cdot\frac{4}{5}=14t^2.$$

另一方面，由半角公式，

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

因为 AD 平分 $\angle BAC$，且 $AD=1$，所以

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}\\&=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{A}{2}\\&=\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{A}{2}\\&=\frac{6t}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

因此

$$14t^2=\frac{6t}{\sqrt{5}}.$$

结合 $t>0$，得

$$t=\frac{3}{7\sqrt{5}}.$$

所以

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=14t^2=\frac{18}{35}}.$$

18.（1） 参考答案： $m=n=1$。

参考解析：

由切线方程

$$y=(\mathrm{e}^2-2)x+1,$$

得

$$f(1)=\mathrm{e}^2-1,\qquad f'(1)=\mathrm{e}^2-2.$$

又

$$f'(x)=m\mathrm{e}^{mx+n}-2mx,$$

所以

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{m+n}-m=\mathrm{e}^2-1,\\ m\mathrm{e}^{m+n}-2m=\mathrm{e}^2-2.\end{cases}$$

由第一式,

$$\mathrm{e}^{m+n}=\mathrm{e}^2+m-1.$$

代入第二式，整理得

$$m^2+(\mathrm{e}^2-3)m-\mathrm{e}^2+2=0,$$

即

$$(m-1)(m+\mathrm{e}^2-2)=0.$$

于是

$$m=1\quad\text{或}\quad m=2-\mathrm{e}^2.$$

由 $2.7<\mathrm{e}<2.8$，知

$$-6<2-\mathrm{e}^2<-5.$$

结合 $m\in\mathbb{Z}$，只能有

$$m=1.$$

代回得

$$\mathrm{e}^{1+n}=\mathrm{e}^2,$$

所以

$$\boxed{m=n=1}.$$

18.（2） 参考答案： $f(x)=\mathrm{e}^{x+1}-x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增，不存在极值。

参考解析：

由第（1）问，

$$f(x)=\mathrm{e}^{x+1}-x^2,$$

所以

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-2x.$$

当 $x\le 0$ 时，

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-2x>0.$$

当 $x>0$ 时，令

$$h(x)=\mathrm{e}^{x+1}-2x,$$

则

$$h'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-2>\mathrm{e}-2>0.$$

因此 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，从而

$$f'(x)=h(x)>h(0)=\mathrm{e}>0.$$

综上，

$$f'(x)>0$$

对所有实数 x 成立，故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增。因此

$$\boxed{f(x)\text{不存在极值}}.$$

18.（3） 参考答案： 对所有 $k<\mathrm{e}$，在 $x\ge -1$ 时恰有 1 个交点，即 $(-1,0)$。

参考解析：

首先，

$$f(-1)=1-1=0,$$

而直线 $y=kx+k$ 也经过 $(-1,0)$。所以

$$(-1,0)$$

始终是一个交点。下面讨论 $x > -1$ 时是否还有交点。令

$$t = x + 1 > 0.$$

交点方程可化为

$$\mathrm{e}^t - (t-1)^2 = kt,$$

即

$$k = G(t) := \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} - t + 2.$$

求导得

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{(t-1)\mathrm{e}^t + 1 - t^2}{t^2} \\ &= \frac{(t-1)(\mathrm{e}^t - t - 1)}{t^2}. \end{aligned}$$

对 $t > 0$，有

$$\mathrm{e}^t - t - 1 > 0.$$

这是因为函数

$$p(t) = \mathrm{e}^t - t - 1$$

满足 $p(0) = 0$，且在 $t > 0$ 时

$$p'(t) = \mathrm{e}^t - 1 > 0.$$

因此，$G'(t)$ 的符号与 $t - 1$ 相同。于是 $G(t)$ 在 $(0, 1)$ 上递减，在 $(1, +\infty)$ 上递增，其最小值为

$$G(1) = \mathrm{e}.$$

所以对一切 $t > 0$,

$$G(t) \geq \mathrm{e} > k,$$

交点方程无解。因此，对于题设中的所有 $k < \mathrm{e}$，两图象在 $x \geq -1$ 时都

$$\boxed{\text{恰有1 个交点，即}(-1, 0)}.$$

19.（1） 参考答案： 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$，故 $f(x)=\frac{1+\sin x}{\pi+2x} \geq \frac{1}{\pi}$。当 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$ 时取等号，所以最小值为 $\frac{1}{\pi}$。

参考解析：

因为 $\pi+2x>0$，所以

$$\frac{1+\sin x}{\pi+2x} \geq \frac{1}{\pi}$$

等价于

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

下面证明这个不等式在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上成立。设

$$g(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi},$$

则

$$g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}.$$

因为 $\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上从 1 严格递减到 0，所以 $g'(x)$ 先正后负，$g(x)$ 先增后减，其最小值在两个端点取得。又

$$g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

故

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$f(x)=\frac{1+\sin x}{\pi+2x} \geq \frac{1+\frac{2x}{\pi}}{\pi+2x}=\frac{1}{\pi}.$$

当 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$ 时取等号，因此

$$\boxed{\min f(x)=\frac{1}{\pi}}.$$

19.（2） 参考答案： 令 $r=\frac{\pi}{2a} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。

当 $0 \leq x \leq r$ 时，令 $G(x)=a\sin x-\sin ax$，则 $G'(x)=a(\cos x-\cos ax) \geq 0$，由 $G(0)=0$ 得 $\sin ax \leq a\sin x$。

当 $r \leq x \leq \pi-r$ 时，$a\sin x \geq a\sin r \geq 1 \geq \sin ax$。

当 $\pi - r \le x \le \pi$ 时，令 $t = \pi - x \in [0, r]$。由 $\sin a\pi \le 0$、$\cos at \ge 0$、$\sin at \ge 0$，得 $\sin ax = \sin a\pi \cos at - \cos a\pi \sin at \le \sin at \le a \sin t = a \sin x$。

因此，对任意 $x \in [0, \pi]$，均有 $\sin ax \le a \sin x$。

参考解析：

记

$$r = \frac{\pi}{2a}.$$

因为 $a > 1$，所以

$$0 < r < \frac{\pi}{2}.$$

把 $[0, \pi]$ 分成靠近两个端点的部分和中间部分，分别证明。①**当** $0 \le x \le r$ **时**。设

$$G(x) = a \sin x - \sin ax.$$

因为

$$0 \le x \le ax \le \frac{\pi}{2},$$

所以

$$G'(x) = a(\cos x - \cos ax) \ge 0.$$

结合 $G(0) = 0$，得

$$G(x) \ge 0,$$

即

$$\sin ax \le a \sin x.$$

②**当** $r \le x \le \pi - r$ **时**。有

$$\sin x \ge \sin r.$$

根据第（1）问中证明的不等式,

$$\sin r \ge \frac{2r}{\pi} = \frac{1}{a}.$$

因此

$$a \sin x \ge 1 \ge \sin ax.$$

③当 $\pi - r \le x \le \pi$ 时。令

$$t = \pi - x,$$

则 $0 \le t \le r$，从而

$$0 \le at \le \frac{\pi}{2}.$$

由 $\sin a\pi \le 0$，以及

$$\cos at \ge 0, \qquad \sin at \ge 0,$$

得

$$\begin{aligned}\sin ax &= \sin(a\pi - at)\\ &= \sin a\pi \cos at - \cos a\pi \sin at\\ &\le \sin at.\end{aligned}$$

再由①中的结论，

$$\sin at \le a \sin t = a \sin x.$$

综上，对任意 $x \in [0, \pi]$，都有

$$\boxed{\sin ax \le a \sin x}.$$

19.（3） 参考答案： $m_{\max} = \frac{\pi}{2}$。

参考解析：

题目要求满足条件的 a 可以任意大。下面先求 m 的上界，再证明这个上界可以达到。

第一步：证明 $m \le \dfrac{\pi}{2}$

假设

$$m > \frac{\pi}{2},$$

则可以选定

$$x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \min\{m, \pi\}\right).$$

此时

$$x_0 \cos x_0 < 0.$$

如果题中的不等式成立，则

$$-2 \le \sin 2ax_0 - \sin ax_0 \le ax_0 \cos x_0.$$

所以

$$a \le \frac{2}{-x_0 \cos x_0}.$$

右侧是一个固定的正数，这说明满足条件的 a 存在固定上界，不可能任意大，与题意矛盾。因此

$$m \le \frac{\pi}{2}.$$

第二步：证明 $m = \frac{\pi}{2}$ 可以达到

任取正数 M，选择一个奇整数 $n \ge 3$，使

$$2n > M,$$

并令

$$a = 2n.$$

对任意

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

令

$$y = 2x,$$

则 $y \in [0, \pi]$，且

$$\sin 2ax - \sin ax = \sin 2ny - \sin ny.$$

我们先证明

$$\sin 2ny - \sin ny \le n \sin y.$$

当 $\sin ny \ge 0$ 时，

$$\sin 2ny - \sin ny = \sin ny(2 \cos ny - 1) \le \sin ny.$$

又因为 $n > 1$，且

$$\sin n\pi = 0,$$

由第（2）问，

$$\sin ny \le n \sin y.$$

因此所需不等式成立。**当 $\sin ny < 0$ 时，**注意到 n 是奇数，因此在

$$\left[0, \frac{\pi}{n}\right] \quad 和 \quad \left[\pi - \frac{\pi}{n}, \pi\right]$$

上均有 $\sin ny \ge 0$。所以此时一定有

$$\frac{\pi}{n} < y < \pi - \frac{\pi}{n},$$

进而

$$\sin y \ge \sin \frac{\pi}{n}.$$

由于 $n \ge 3$，可以对 $\frac{\pi}{n}$ 应用第（1）问中得到的不等式，得

$$\sin \frac{\pi}{n} \ge \frac{2}{n}.$$

于是

$$n \sin y \ge 2.$$

另一方面，

$$\sin 2ny - \sin ny \le 2,$$

故仍有

$$\sin 2ny - \sin ny \le n \sin y.$$

综上，对任意 $y \in [0, \pi]$，都有

$$\sin 2ny - \sin ny \le n \sin y.$$

换回 $y = 2x$，得

$$\begin{aligned} \sin 2ax - \sin ax &\le n \sin 2x \\ &= 2n \sin x \cos x \\ &\le 2nx \cos x \\ &= ax \cos x. \end{aligned}$$

其中使用了

$$\sin x \le x, \qquad \cos x \ge 0 \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$$

而 $\sin x \le x$ 可由

$$(x-\sin x)' = 1-\cos x \ge 0$$

及 $x-\sin x$ 在 $x=0$ 时为 0 得到。这样，对任意正数 M，都可以找到 $a=2n>M$，使不等式在整个 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上成立。结合第一步，

$$\boxed{m_{\max}=\frac{\pi}{2}}.$$