深圳中学 2027 届高三第一阶段考试数学试题

一、选择题

本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.（5 分）设集合 $A=\{y\mid y\le a\}$，集合 $B=\{y\mid -1\le y\le 1\}$，若集合 $A\cap B$ 只含一个元素，则（　　）

A. $a=1$　　B. $a>1$　　C. $a=-1$　　D. $a<-1$

2.（5 分）已知 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ 是偶函数，则 $a=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3.（5 分）设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$”是“$\tan x=0$”的（　　）

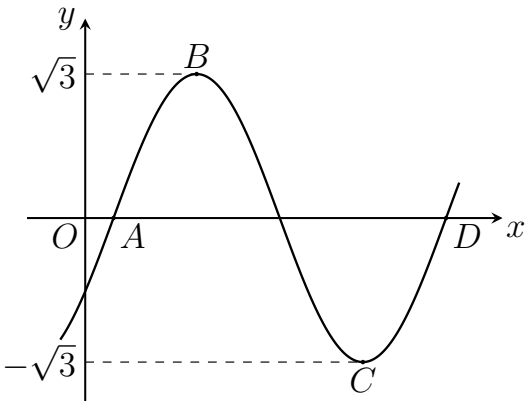
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4.（5 分）设 $a=\log_5 3,\ b=\log_4 3,\ c=2^{0.3}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

5.（5 分）函数 $y=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0)$ 的部分图象如图所示，若 A,B,C,D 四点在同一个圆上，则 $\omega=$（　　）



A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. π　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

6.（5 分）已知函数 $f(x)=a\ln x-\mathrm{e}^{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，则 a 的最大值为（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C. e　　D. $2\mathrm{e}^{2}$

7.（5 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^{2}-2x, & x\le a,\\ 1-2x, & x>a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最大值，则 a 的最小值为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

8.（5 分）已知正实数 x, y 满足 $x+y=2a$，若 $xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取得最小值时有 $x=y$，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1]$　　B. $(0,\sqrt[3]{2}]$　　C. $(0,\sqrt{2}]$　　D. $(0,2]$

二、选择题

本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.（6 分）已知 $\alpha\in(0,\pi)$, $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，下列说法正确的是 (　　)

A. $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$　　B. $\sin 2\alpha=-\frac{2}{3}$　　C. $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

10.（6 分）已知曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与曲线 $y=ax^2+bx$ 的图象共有三个交点 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$，其中 $x_1<x_2<0<x_3$，下列说法正确的是 (　　)

A. $a>0$　　B. $b>0$　　C. $x_2+x_3>0$　　D. $y_2+y_3>0$

11.(6 分) 若定义在 D 上的偶函数 $f(x)$ 满足对任意 $a,b\in D$ 且 $a+b\in D$,有 $f(a+b)\le\max\{f(a),f(b)\}$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为 S-函数，下列说法正确的是 (　　)

(注：$\max\{u,v\}$ 表示实数 u,v 中的较大者)

A. 若 $f(x)$ 为 S-函数且 $0\in D$，则 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的最小值

B. 若 $f(x)$ 为 S-函数且 $1\in D$，则 $f(1)$ 为 $f(x)$ 的最大值

C. 若 $D=\mathbf{Z}$，存在 S-函数在 $\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\le x\le 2026\}$ 上恰好有 66 个最小值点

D. 若 $D=[-1,1]$，存在 S-函数满足 $f\left(\frac{1}{5}\right)\ne f\left(\frac{2}{5}\right)$ 且 $f(0)=f(1)$

三、填空题

本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.（5 分）已知 $f(x^3)=\log_8 x$，则 $f(4)=$ _____.

13.（5 分）已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\ (\omega>0)$，$x_1,x_2$ 满足 $f(x_1)\cdot f(x_2)=-4$，若 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$ _____.

14.（5 分）已知平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$CD=1$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，则 BC 的最小值为 _____.

四、解答题

本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数，其中 $a>0$，求 a 的最小值.

16.（15 分）已知函数 $f(x)=\ln x-a\sqrt{x}$.

（1） 讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2） 当 $a>0$ 时，证明：$f(x)<\frac{2}{\mathrm{e}a^2}-1$.

17.（15 分）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，$(b-c)(\sin B+\sin C)=(a-\sqrt{2}c)\sin A$.

（1） 证明：$\triangle ABC$ 是锐角三角形；

（2） 已知点 D 在线段 BC 上，且 AD 平分 $\angle BAC$，若 $AD=1$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.（17 分）已知曲线 $f(x)=\mathrm{e}^{mx+n}-mx^2$ $(m,n\in\mathbf{Z})$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线方程为 $(\mathrm{e}^2-2)x-y+1=0$.

（1） 求 m,n；

（2） $f(x)$ 是否存在极值？若存在，求出极值；若不存在，说明理由；

（3） 当 $x\geq -1$ 时，求直线 $y=kx+k$ $(k<\mathrm{e})$ 与曲线 $y=f(x)$ 交点的个数.

19.（17 分）

（1） 证明：函数 $f(x)=\frac{1+\sin x}{\pi+2x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $\frac{1}{\pi}$；

（2） 若 $a>1$ 且 $\sin a\pi\leq 0$，证明：$\sin ax\leq a\sin x$ 对任意 $x\in[0,\pi]$ 成立；

（3） 若对任意的正数 M，存在 $a>M$，使得 $\sin 2ax-\sin ax\leq ax\cos x$ 对任意 $x\in[0,m]$ 成立，求 m 的最大值.